



TITLE:

$\beta$ 平面上の2次元乱流における  
帯状流形成 (乱流による輸送, 拡  
散, 混合の数理)

AUTHOR(S):

長谷川, 実子; 余田, 成男

---

CITATION:

長谷川, 実子 ...[et al].  $\beta$ 平面上の2次元乱流における帯状流形成  
(乱流による輸送, 拡散, 混合の数理). 数理解析研究所講究録 2003, 1339:  
129-138

ISSUE DATE:

2003-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/43433>

RIGHT:

## $\beta$ 平面上の 2 次元乱流における帯状流形成

京大院・理 長谷川実子 (Jitsuko HASEGAWA)

京大院・理 余田成男 (Shigeo YODEN)

### 1 はじめに

2 次元乱流において、一般の 3 次元乱流とは異なる興味深い現象が見られることは広く知られている。McWilliams(1984) によって指摘された孤立渦は、減衰性の 2 次元乱流に特有のエネルギーの逆カスケードと密接に結び付いた、その端的な例である。本研究は、その 2 次元乱流に、回転球面の効果を加えた場合の現象を詳しく調べることを目的としている。大気や海洋などの地球流体においては、そのアスペクト比の大きさから、大規模運動をほぼ 2 次元的と見なすことが可能で、回転球面効果を加えた 2 次元乱流は地球流体の性質を調べる上で、基本的な知識を提供するものである。

地球のような回転球面上における回転効果の非一様性を考慮した簡単系である  $\beta$  平面上で 2 次元乱流実験を行なうと、東西方向 (回転軸に垂直な方向) の流れが卓越した場が得られることが、Rhines(1975) によって指摘されている。これは McWilliams によって指摘された平面上の減衰性 2 次元乱流における孤立渦とは異なる秩序構造であると考えられる。回転球面上での実験でもこの特徴が見られ (Williams(1978), Hayashi et al.(2000))、外惑星の表面に見られる渦構造の形成、維持過程の解明とも関連して興味を持って研究されてきた。ここでは  $\beta$  平面上で高分解能の実験を行ない、そこで形成される帯状流の幅、流れの方向による差異およびその形成過程における運動量輸送との関連に着目して解析を行なった。

### 2 数値実験の方法

#### 2.1 支配方程式

ここで用いる方程式系は、 $\beta$  平面上の 2 次元非発散渦度方程式である。地球流体を考えるためには、球面幾何を用いるのが自然であるが、ここでは球面上で回転の効果が緯度によって変化する効果 ( $\beta$  効果) にのみ着目し、 $\beta$  平面を用いている。すなわち、コリオリパラメータ  $f$  を、基準となる緯度での値を  $f_0$  として、この緯度からの南北方向の距離  $y$  の一次関数：

$$f = f_0 + \beta^* y \quad (1)$$

で近似する。このコリオリパラメータの南北方向変化率  $\beta^*$  を用いて、無次元化した支配方程式は、2 次元非発散の渦度方程式：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = \nu \Delta^2 \zeta \quad (2)$$

で表される。ここで渦度 $\zeta$ は、流線関数 $\psi$ を介して流速 $(u, v)$ と以下のように結ばれる：

$$u \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\zeta = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi = \nabla^2 \psi. \quad (3)$$

また、 $\beta$ はコリオリパラメータの南北方向変化率 $\beta^*$ に関連した以下で述べる無次元量である。

渦度方程式(2)は、絶対渦度を用いると保存形で書くことができる。絶対渦度 $q$ は、回転の効果による惑星渦度 $f$ と、運動による相対渦度 $\zeta$ の和で

$$q = f + \zeta \quad (4)$$

と表され、これを用いて渦度方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = \nu \Delta^2 q \quad (5)$$

となる。これは、粘性を除いてラグランジュ保存量となっている。

## 2.2 Rhines scale と実験パラメータ

ここで、この系で重要な空間スケールについて述べる。速度スケール(時間的に変化しないと仮定) $U[\text{ms}^{-1}]$ とコリオリパラメータの南北方向変化率 $\beta^*[\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}]$ とによって、一つの空間スケール $L_\beta$ とそれに対応する波数 $k_\beta$ ：

$$L_\beta = \sqrt{\frac{U}{\beta^*}}, \quad k_\beta = \sqrt{\frac{\beta^*}{U}} \quad (6)$$

を定義できる。これは、この系で決まる唯一の空間スケールであり、物理的には $\beta$ 平面上の(次元付き)渦度方程式において、移流項と $\beta^*$ を含む線型項の大きさが等しくなる空間スケールである。これは、非線型の移流項が中心的な役割を果たす乱流場から、主に線型のロスビー波が支配する場へと移り変わる空間スケールとなっている。このスケールを、これを最初に導入したRhines(1975)に因んでRhines scaleとよんでいる。

無次元方程式(2)に現われる $\beta$ は、実験領域(積分領域)の一辺の長さ $L_{\text{exp}}$ に対するRhines scaleの比を表す量で、その関係式が

$$\beta = \left( \frac{L_{\text{exp}}}{L_\beta} \right)^2 \quad (7)$$

で与えられる。本研究では、同一の幾何条件のもとで回転率のみを変化させる状況を想定し、 $\beta$ を変化させることによりこれを表現している。すなわち、この無次元 $\beta$ を $\beta = 2^{n-1} \times 100 (n = 1, 2, \dots, 10)$ として、回転の遅い方から速い方へ10通りの場合を考える。これは、上で述べた比を0.1, 0.07,  $\dots$ , 0.004と変化させたことに相当する。

## 2.3 実験条件

渦度方程式 (2) を、 $(2\pi \times 2\pi)$  の 2 重周期境界条件平面で空間方向にはスペクトル法、時間方向には差分法を用いて数値積分した。空間スペクトル展開の  $x$  方向波数  $k$ 、 $y$  方向波数  $l$  の切断波数は共に  $k = l = 1024$  である。右辺は計算のための数値粘性で、切断波数付近にたまるエネルギーを取り除くために加えるものである。数通りの実験を行ない、適切な係数として  $\nu = 10^{-10}$  を選んだ。初期値として、1 次元エネルギースペクトルが総波数  $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$  の関数として

$$E(\kappa, t = 0) = \frac{A\kappa^{\gamma/2}}{(\kappa + \kappa_0)^\gamma} = 0.5, \quad (8)$$

$$\kappa_0 = 226, \gamma = 1000$$

で表され、 $x, y$  方向には等方的な渦度分布を与える。これは Cho and Polvani(1996) で用いられた関数形で、 $\kappa_0 = 226$  の周辺の狭い波数領域にのみエネルギーを持つような分布となっている。時間積分には 4 次精度の Runge Kutta 法を用い、その時間増分は  $\Delta t = 0.0004$  とした。

このような条件で、時刻  $t = 12.0$  まで数値積分を行なった。これは、ここで着目している帯状流がほぼ安定して形成されるのに十分な時刻となっている。

## 3 実験結果の解析

### 3.1 $\beta$ 平面上での一般的特徴

はじめに、ここで考察している現象の、各パラメータ値に共通の一般的特徴を、 $\beta = 100$  の場合を例にとって述べておく。領域の全エネルギーは数値粘性によってのみ減衰し、時刻  $t = 12$  において初期エネルギーの 84 % を保持している。また、エンストロフィーは初期に急激に減衰し、 $t = 0.2$  付近に減衰率のピークを持つ。時刻  $t = 12$  において全領域が持つエンストロフィーは、初期の 0.23 % である。

図 1 は、流線関数  $\psi(x, y)$  と  $x$  方向平均  $x$  方向流 (以下、帯状流と呼ぶ)  $\bar{u}(y)$  の時間変化を示したものである。初期値として、空間等方的で非常に小さいスケールの場合を与えるが、この時点で強さ、位置共にランダムな微小幅の帯状流を持っている ((a)  $t = 0.0$ )。初期には渦の融合によって空間スケールが大きくなる ((b)  $t = 2.0$ )。これは  $\beta$  効果がない場合と同様である。さらに時間が経つと、流線関数が  $x$  方向に引き延ばされ、 $y$  方向流速に対して  $x$  方向流速が卓越してくる ((c)  $t = 8.0$ )。それに対応して帯状流が強さを増し、空間スケールも増大する。その後は高波数成分が減衰しながらより安定な帯状流へと時間発展する ((d)  $t = 12.0$ )。

絶対渦度空間では、 $y$  方向に一様に増加する惑星渦度に、ランダムな相対渦度が重なった構造をしている初期値から、 $y$  方向に一様に増加する安定な渦度渦度分布に近付くように時間発展し、十分に時間が経った後には、場の絶対渦度は基本的に安定に成層し、擾乱が各等絶対渦度面上をあたかも水面の波のように伝播するようになる。

図 2 は波数空間で 2 次元エネルギースペクトルの時間発展を描いたもので、初期に高波数 ( $\kappa = 226$ ) にあったエネルギーの最大値が急速に低波数側に移動する様子が分かる ((a)  $t = 0.0$ , (b)  $t = 2.0$ )。また、上で述べた  $xy$  方向に関する異方性は、波数空間でより鮮明に現われる。初期には等方的で、総波数  $\kappa$  にのみ依存する構造であったエネルギー分布 ((a)  $t = 0.0$ ) が、十分に時間が経った後には非等方的になっている ((c)  $t = 8.0$ , (d)  $t = 12.0$ )。低波数の最もエネルギー密度が高い部分は、 $x$  方向波数  $k = 0$  の周辺にあり、 $y$  方向波数  $l$  に関して、それよりも低波数側

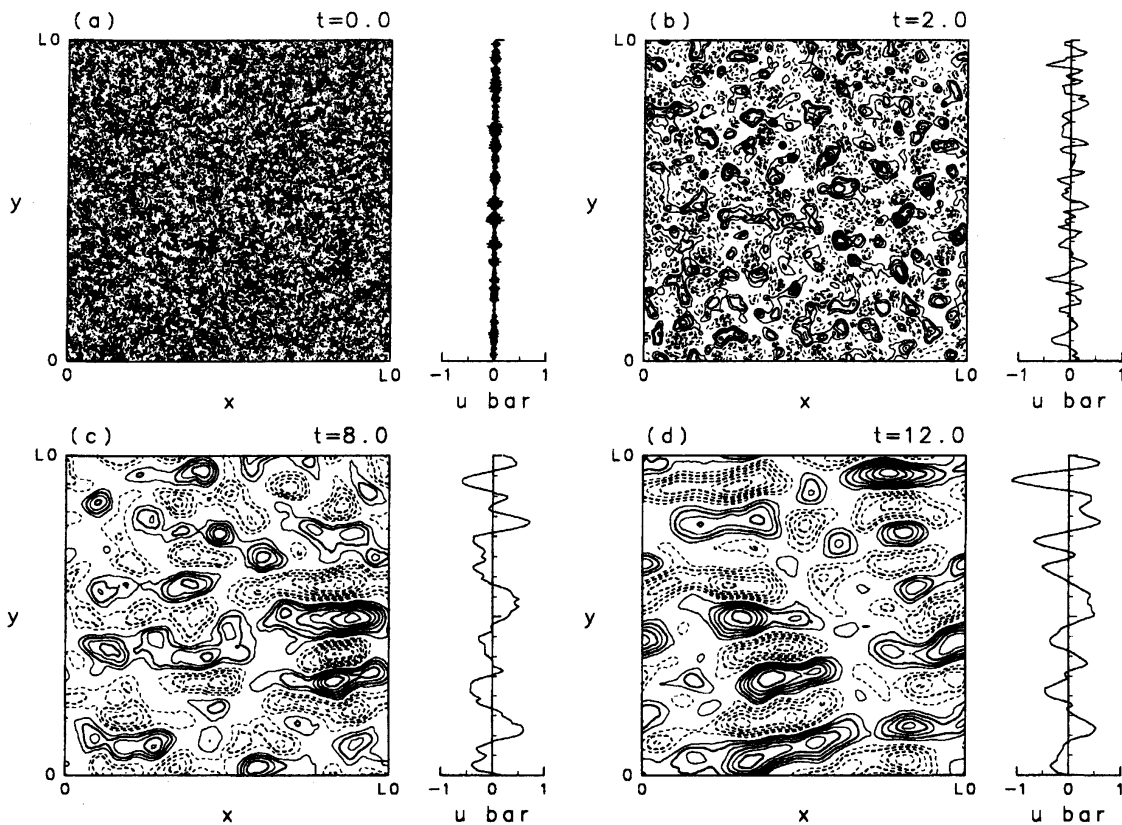


図 1: 流線関数と帯状流の時間変化 ( $\beta = 100$  の場合)。流線関数の図で、破線は負の値を示す。  
(a)  $t = 0.0$ , (b)  $t = 2.0$ , (c)  $t = 8.0$ , (d)  $t = 12.0$

ではエネルギー密度が周囲に比べて著しく低くなるような障壁が見られる。これは、本研究で着目している帯状流の形成とその  $y$  方向スケールに密接に関連している。

各図中の点線は、Vallis and Maltrud(1993) が導入した  $x, y$  方向の異方性を考慮した場合の Rhines scale で、等方的であると仮定した場合の Rhines scale (6) を用いて

$$(k, l) = k_{\beta} \left( \cos^{3/2} \theta, \cos^{1/2} \theta \sin \theta \right), \quad \theta = \tan^{-1} (l/k) \quad (9)$$

で表される。これよりも大きいスケール (小さい波数) では、ロスビー波が場を支配するようになり、一般の 2 次元乱流におけるエネルギーの逆カスケードが起こりにくくなると考えられているが、ここではそのような障壁がこの曲線よりも内側にある。

### 3.2 帯状流の幅の $\beta$ 依存性

次に、 $\beta$  効果の強さをパラメータとして変化させた実験の結果について述べる。この実験で、得られた帯状流の幅に明らかな  $\beta$  依存性が見られた。上で述べた通り、無次元の  $\beta$  を 10 通りに変化させて実験を行なったが、ここでスケーリングをし直してより広い次元付き  $\beta^*$  に対する実験結果を得る。無次元方程式での実験結果から、次元付きの惑星渦度勾配  $\beta^*$  に対する結果に読み換える際、着目する空間領域を 2 通り考えることにより、10 パラメータの実験から、重なりを含めて見かけ上次元付き空間の 16 パラメータに対する結果を得ることができる。物理的には、

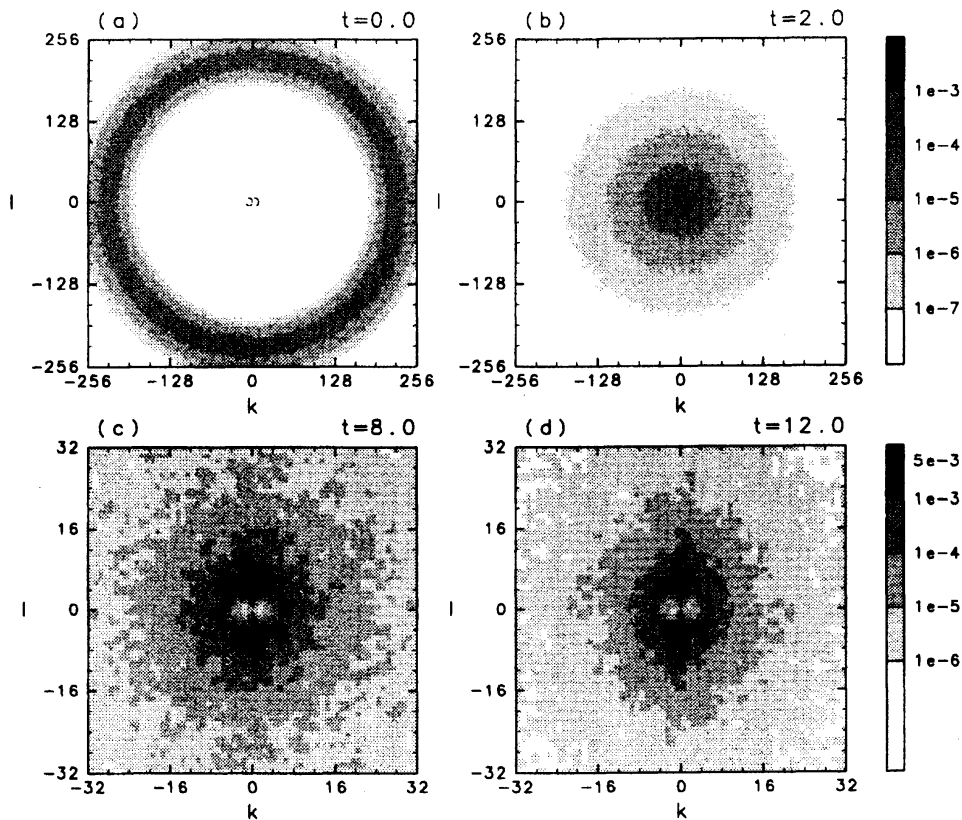


図 2: 2次元エネルギースペクトルの時間変化 ( $\beta = 100$  の場合)。(a)  $t = 0.0$ , (b)  $t = 2.0$  と (c)  $t = 8.0$ , (d)  $t = 12.0$  で描画領域、色が異なることに注意。図 (b) 中の破線で描かれた正方形は図 (c), (d) の描画領域を示す。また、各図中の点線は非等方的な Rhines scale を表す。

回転速度を遅くしていくと実験領域に対して Rhines scale が大きくなり、周期境界の影響を無視できなくなる可能性があるため、便宜的に実験領域を着目する領域の 8 倍とみなし、実験領域の  $1/8$  だけを取り出して回転速度が遅い場合の結果とみなすことになる。これにより、次元付き  $\beta^*$  に対して、現実的な地球の値を含む領域に対する結果を得ることができる。ただし、ここで  $\beta$  平面近似の妥当性を無視し、実際の球の半径よりも大きな  $\beta$  平面を想定していることに注意が必要である。

図 3 は、次元付き  $\beta^*$  に対する、帯状流の南北スケール (「帯状流の幅」) を、波数で示したものである。「帯状流の幅」を、ここでは便宜的にエネルギーで重みを付けた平均波数で定義する。ここで、何らかのエネルギースペクトルを採用する必要があるが、図 2 に示したように、場が著しく非等方的であるため、等方乱流で通常用いられるような、総波数  $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$  に対する 1 次元エネルギースペクトルには現実的な意味がないと考えられる。そこで、直接的に帯状流を表す  $x$  方向波数  $k = 0$  成分に関する 1 次元エネルギースペクトルを採用して、このエネルギーで重みをつけた平均波数を定義した。この結果、ここで定義した帯状流の幅の  $\beta$  依存性は、図に破線で示した Rhines scale の  $\beta$  依存性と極めて良く一致することが分かった。実験パラメータ  $\beta$  が大きいものについてずれが見られるのは、最終的に形成される帯状流の幅に対して、初期に与えた場のスケールが十分に小さくなかったために、中立な結果が得られていないことが原因と

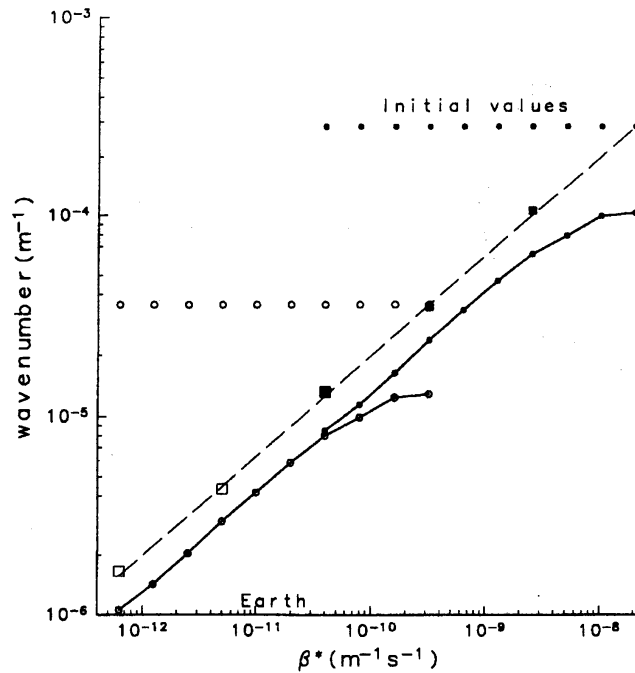


図 3: 帯状流の幅の  $\beta$  効果の強さに対する依存性。○および●のマーク付き曲線で示す。幅の定義は本文参照。破線は Rhines scale を表す。また、正方形のマークは 3.3 節の「強いジェット」を用いて定義した場合の帯状流の幅を示す。また、 $\beta^*$  の現実的な地球パラメータにおけるおおよその値を Earth で示した。

考えられる。次節で議論する「強いジェット」の幅を用いてこれを定義した場合には、正方形のマークのようになり、定量的にも Rhines scale とよく一致することがわかる。

### 3.3 東向き、西向きのジェットに関する統計的性質

次に、東向き、西向きの帯状流における差異を調べる。この目的のために、エネルギースペクトルの構造が等しく、位相のみ異なる複数の初期値を与え、より多くの帯状流を得てその統計的性質を調べた。

前節の結果より、空間スケールを Rhines scale として方程式を無次元化することができる。ここで、速度スケールとして、時間的にはほぼ保存すると考えている全領域のエネルギー  $E_0$  から  $U = \sqrt{2E_0}$  を用いると、空間スケール、時間スケールをそれぞれ

$$L_\beta = \sqrt{\frac{U}{\beta}}, \quad T_\beta = \frac{L_\beta}{U} = \frac{1}{\sqrt{\beta U}} \quad (10)$$

として、粘性項を除いた無次元方程式が

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \sim 0 \quad (11)$$

で与えられる。従って、 $\beta$  を変化させる必要がないのであるが、ここでは有限切断の影響を考慮するために  $\beta = 100, 800, 6400$  の 3 通りで実験を行なった。上で述べたように、それぞれのパラ

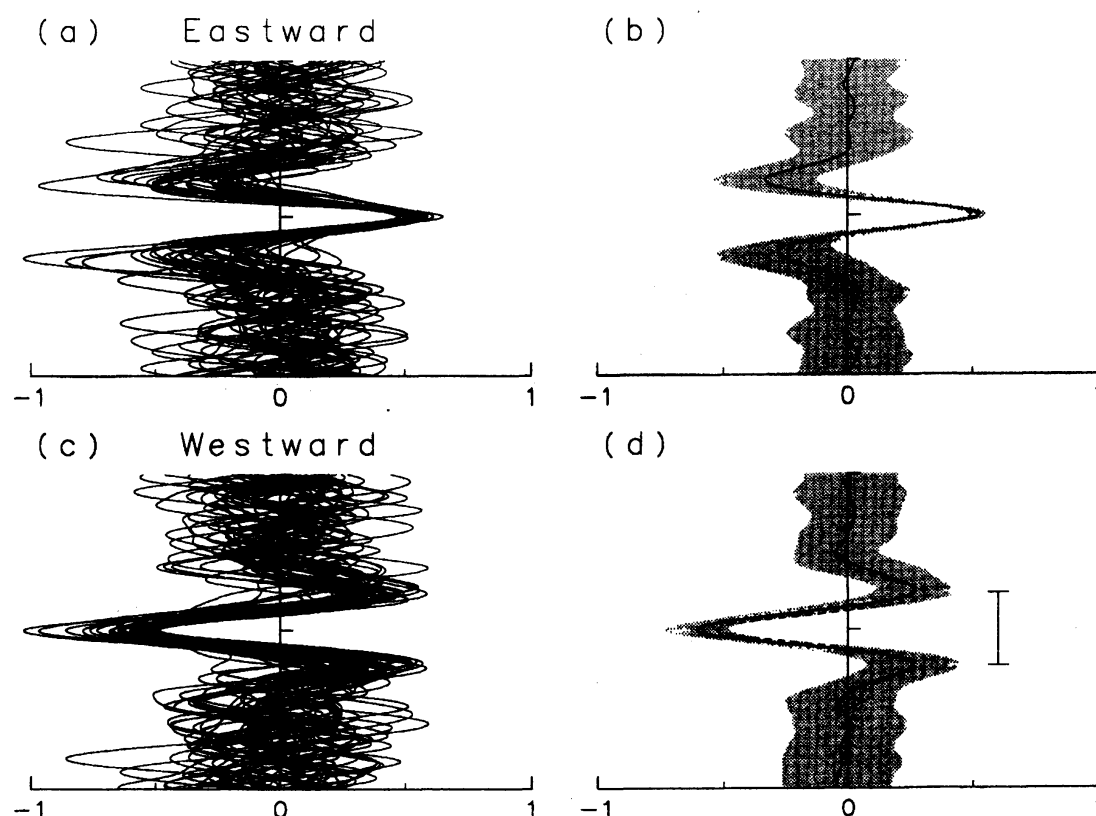


図 4: (a) 東向き「強いジェット」36 個、(b) 東向き「強いジェット」平均値と各  $y$  座標における標準偏差、(c) 西向き「強いジェット」42 個、(d) 西向き「強いジェット」平均値と各  $y$  座標における標準偏差。(d) の点線は (b) の実線の正負を逆にしたもの。

メータに対して、同じ 1 次元エネルギースペクトルを持ち、位相のみ異なる 11 種類の初期値を与えて前節と同じ実験条件で数値積分し、得られた場から帯状流に関する解析を行なった。

解析の結果を、主に  $\beta = 6400$  の場合について述べる。まず、東向きまたは西向きの「ジェット」を、それぞれ各時刻で  $y$  のみの関数である帯状流 ( $x$  方向平均  $x$  方向流) の極大値または極小値で定義した。基本的にはそれぞれ東向き、西向きの強い帯状流を念頭においているのであるが、実際には 2 つの東向き「ジェット」の間の極小値 (値は正)、2 つの強い西向き「ジェット」の間の極大値 (値は負) も極小値、極大値として取り出している。このような「ジェット」の値は、極大値、極小値ともに以下に示す平均値  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  を持つほぼ正規分布に近い分布を成す。

	$\mu$	$\sigma$
極大値	0.19273	0.16456
極小値	-0.18662	0.18024

極大値 (基本的には東向きのジェット) の平均値の方が極小値 (基本的には西向きのジェット) のそれよりも大きい、極小値の方が標準偏差が大きい。その結果、次に示すように、絶対値の大きいもの、すなわち強いジェットは西向きの方が多く、またその大きさも顕著なものが存在する。さらに、「強いジェット」を、全体の平均値  $\mu$  から、標準偏差を  $\sigma$  として  $1.645\sigma$  よりも離れた



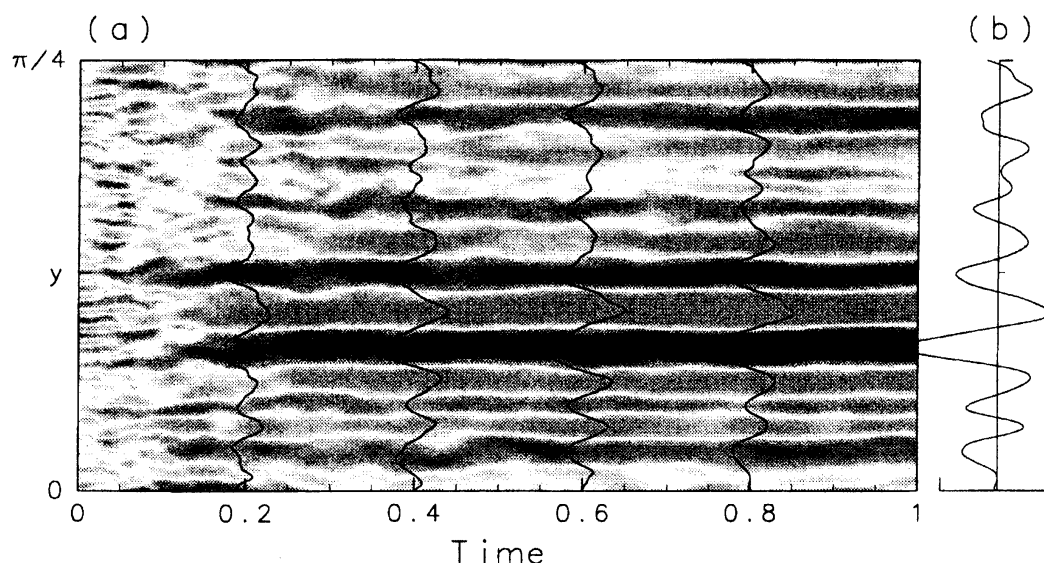


図 5: (a) 初期段階 ( $t = 0.0$  から  $t = 1.0$ ) における帯状流形成の様子。色が濃いほど絶対値が大きいことを示す。0.2 ごとに曲線でも示した。(b) 十分時間が経った後 ( $t = 12$ ) のジェット。  
( $\beta = 6400$  の一例で、領域は一部分。)

位置にあるものとして定義した。これは、分布が正規分布である場合には、絶対値の大きい方から全体の 10 % を取り出すことに相当する。このようにして定義した「強いジェット」は、東向きのものが 36 個、西向きのものが 42 個あった。これらを、極大値で揃えて重ね合わせたものを図 4 に示す。これから、強いジェットは場にランダムに分布していること、強いジェットが標準的な形を持つことが分かる。ここで、「強いジェット」の  $y$  方向スケールをこの平均値から見積もることができる。これを図 4(d) に示したようにジェットの両どりの極値間距離で定義し、極大値と極小値でほとんど差がなかったため平均をとった。これを示したのが図 3 の正方形のマークで、これは Rhines scale と極めて良く一致する。また、極大点と極小点の絶対値には統計的に有意な差が見られ、「強いジェット」に関しては西向きのものの方がその流速が速いと結論できる。パラメータを変えても定性的には同様の結果が得られた。

### 3.4 初期段階における帯状流の形成過程

図 5 は、ごく初期段階において帯状流が形成される様子の一例を示したもので、初期値を持つ帯状流の強さや位置とは別に、初期のある期間 (ここでは  $t = 0.1$  から  $t = 0.2$ ) で、最終的に発達するジェットが決定されている様子が見てとれる。また、一度これが決まってからは、強いジェットがその位置を固定したまま強さのみを変化させながら時間発展することも分かる。ここでは詳細は省略するが、このような時間発展は、時間平均流を基本場とする弱非線型理論では説明できる。

### 3.5 帯状流の形成過程と運動量輸送

初期に帯状流が形成される期間における運動量輸送を調べた。粘性を無視した場合、各時刻における  $x$  方向平均流  $\bar{u}(y, t)$  からのずれを擾乱として、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \sim -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} \quad (12)$$

が成り立つ。ここでは、 $\beta = 6400$  でケーススタディを行なった。時刻  $t = 0.2$  においてほぼ同程度の強さを持ちながら、十分時間が経過した後には強さに差が出た2つのジェット周辺の運動量輸送を、運動量保存則 (12) を用いて調べた。積分を始める時間を  $t = 0.0$  として、 $t = 0.4$  までの期間について、 $t = 0.0$  から  $t = 0.2$ 、 $t = 0.0$  から  $t = 0.4$  における各  $y$  座標における擾乱の運動量フラックス  $\overline{u'v'}$  の収束を求めたところ、 $t = 0.0$  から  $t = 0.2$  までの期間では、2つのジェットの周辺でこの量にほとんど差がないのに対して、 $t = 0.0$  から  $t = 0.4$  までの分布は大きく異なり、この期間で運動量フラックス収束が大きい方のジェットが最終的に発達したことが分かった。また、 $t = 0.4$  までの分布は、十分時間が経過した後 ( $t = 12$ ) におけるジェットの強弱の分布と極めて相関が良く、ここまでの運動量フラックス収束量で、形成されるジェットの相対的強さ、位置が決定されることも分かった。

## 4 おわりに

$\beta$  平面上で、減衰性2次元乱流実験を行ない、そこで形成される帯状流の性質を調べた。空間的に十分に小さいスケールの初期値を与えて数値積分を行ない、十分に時間が経過した後の場を解析して、以下の結果を得た。

$\beta$  効果の強さをパラメータとして変化させた実験から、この系で形成される帯状流の南北方向の幅 ( $y$  方向スケール) が、Rhines scale の  $\beta$  依存性と非常に良い一致を示すことが分かった。すなわち、形成される帯状流の幅は  $\beta$  が大きくなると  $\sqrt{\beta}$  に反比例して狭くなる。特に、よく発達した強いジェットの幅は、初期に与えるエネルギーから見積もった Rhines scale と定量的にもよく一致する。

アンサンブル実験から得た多数のジェットについて統計的性質を調べた。よく発達した強いジェットのみに着目した場合、その強さは西向きの方が大きい。これは、これまでの強制を入れた  $\beta$  平面上の2次元乱流実験の結果とは逆である。これまで、西向きのジェット (地球を考えるなら東風) の方が弱い理由として、この系での順圧不安定条件が挙げられてきた。すなわち、この系で順圧不安定が起きる必要条件が、 $x$  方向平均の絶対渦度  $\bar{q}$  を用いて

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} < 0 \quad (13)$$

で表され、これを避けるような場が実現しやすいとすれば、西向きジェットは弱くなる傾向にあるという議論である。しかし、今回の実験では、場全体で  $\bar{q}_y > 0$  という順圧安定の条件を満たしながら、特に強いジェットの絶対値は西向きの方が大きいという結果になった。条件 (13) は帯状流の向きだけでなく、その曲率すなわち幅にも関係しているため、これだけから強いジェットの向きを議論することはできない。

最後に、帯状流の形成過程における運動量輸送に関する解析から、発達するジェットの強さと位置は、ごく初期の短い期間における運動量輸送によって決まることが分かった。

数値実験は京都大学学術情報メディアセンターの VPP800 を用いて行なった。作図に地球流体電脳倶楽部のパッケージ、数値計算に ISPACK を使用した。これらの開発、管理に携わる方々に感謝する。

## 引用文献

- Cho, J.Y-K and L.M. Polvani, 1996: The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere. *Phys. Fluids*, **8**, 1531-1552.
- Hayashi, Y.-Y., K. Ishioka, M. Yamada, and S. Yoden, 2000: Emergence of Circumpolar vortex in two dimensional turbulence on a rotating sphere. *IUTAM Symposium on Developments in Geophysical Turbulence.*, 179-192, Kluwer Academic Publishers.
- 石岡圭一, 2002: ispack-0.61, <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>, 地球流体電脳倶楽部.
- McWilliams, J., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21-43.
- Rhines, P.B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.
- Vallis, G.K. and M.E. Maltrud, 1993: Generation of Mean Flows and Jets on a Beta Plane and over Topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346-1362.
- Williams, G.P., 1978: Planetary circulations, 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631-643.